**Гармоническая функция и ее связь с аналитической**

Пусть на области http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif плоскости http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image002.gif задана аналитическая функция http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image003.gif. Тогда, функция http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image004.gif имеет на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif непрерывные [производные](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117) любого порядка. Но тогда функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image005.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image006.gif имеют на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif непрерывные частные производные любого порядка, а первые производные удовлетворяют условиям Коши - Римана

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image007.gif, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image008.gif,                        (1)

из которых следует

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image009.gif, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image010.gif.

Складывая эти равенства, получаем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image011.gif.                     (2)

Левую часть уравнения (2) обозначают символом

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image012.gif.

Уравнение

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image013.gif                        (3)

называют уравнением Лапласа. Символ http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image014.gif называют оператором Лапласа.

Функцию http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image005.gif, имеющую непрерывные [частные производные](http://stu.sernam.ru/book_ehm.php?id=149) второго порядка на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif и удовлетворяющую уравнению Лапласа (3), называют гармонической на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif.

Итак, мы установили, что действительная часть аналитической на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif функции является гармонической функцией наhttp://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif.

Если первое равенство в (1) продифференцировать по http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image015.gif, а второе - по http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image016.gif и вычесть второе равенство из первого, то будем иметь

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image017.gif,

т. е. и мнимая часть аналитической функции является гармонической функцией.

Однако функция http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image018.gif, где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image005.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image006.gif - произвольные гармонические на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif функции, не всегда является аналитической на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif. Она будет аналитической, только если функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image005.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image006.gif удовлетворяют на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_114.files/image001.gif условиям Коши - Римана